LOGARITMI

Uvedli so jih v 16. in 17. stoletju pri astronomiji, da bi si olajšali računanje z velikimi števili.
Primeri uporabe:

- Rihtarjeva lestvica za merjenje jakosti potresnih sunkov je logaritemska
- kvantitativni zapis kislosti oz. bazičnosti raztopin: pH = - log $[H_3O^+]$
- glasnost zvoka
- svetlost zvezd

(A) Definicija

Logaritem *x* s pozitivno osnovo *a* je tisti eksponent, pri katerem je potenca z osnovo *a* enaka številu *x*:

$$\boxed{\log_a x = y \iff a^y = x}$$

Definiran je samo za pozitivne osnove *a*, saj ni takega eksponenta, ki bi pri pozitivni osnovi *a* dal negativno vrednost ustrezne potence.

$\log_a x$ *a* – osnova *x* – logaritmand ali argument

Logaritem z osnovo 10 imenujemo desetiški logaritem in po dogovoru osnove ne pišemo: $\log_{10} x = \log x$.
Logaritem z osnovo *e* imenujemo naravni logaritem in ga označimo: $\log_e x = \ln x$.

(B) Vaja

1. Izračunaj.

$\log 10 =$
$\log 100 =$
$\log 1000 =$
$\log 10000 =$
$\log 100000 =$
$\log 100000000 =$

$\log 0{,}1 =$
$\log 0{,}01 =$
$\log 0{,}001 =$
$\log 0{,}0001 =$
$\log_2 64 =$
$\log_5 625 =$

$\log_3 729 =$
$\log_{\frac{1}{2}} 32 =$
$\log_{16} 2 =$
$\log \sqrt{10} =$
$\log_{2,5} 0{,}16 =$
$\ln e =$

Za vsak *a* > 0 je $\boxed{\log_a a = 1}$, saj je $a^1 = a$.

2. Reši enačbo.

a.
$\log_2 x = 4$
$\log_3 x = -3$
$\log_4 x = -2$
$\log_3 x = \frac{1}{2}$

b.
$\log_x 8 = 3$
$\log_x 125 = 3$
$\log_x 64 = 6$
$\log_x \frac{1}{32} = -5$
$\log_x 5 = \frac{1}{4}$

3. Izračunaj.

$3^{\log_3 9} =$
$5^{\log_5 125} =$
$6^{\log_6 36} =$

$\log_3 3^4 =$
$\log_4 4^2 =$
$\log_5 5^3 =$

$\boxed{a^{\log_a x} = x}$ $\boxed{\log_a a^x = x}$

PRAVILA ZA RAČUNANJE Z LOGARITMI

$$\log_a(x_1 \cdot x_2) = \log_a x_1 + \log_a x_2$$

$$\log_a\left(\frac{x_1}{x_2}\right) = \log_a x_1 - \log_a x_2$$

$$\log_a x^r = r \cdot \log_a x$$

$$\log_a \sqrt[r]{x} = \frac{1}{r} \cdot \log_a x$$

1. Izrazi z logaritmi z osnovo *a* pozitivnih števil *a, b, c* in *d.*

   $\log_a \frac{ab}{cd} =$

   $\log_a(a^2bc) =$

   $\log_a(a^4b^2c)$

   $\log_a\left(a^5b\frac{\sqrt{c}}{d^3}\right) =$

2. Zapiši z logaritmi praštevil.

   $\log 500 =$

   $\log 0{,}64 =$

   $\log 2{,}88 =$

3. Izračunaj brez žepnega računala.

   $\log 200 - \log 21 + \log 105 =$

   $2\log 21 - \log 9 - 2\log 7 =$

   $12 + \log 8 + 3\log 5 =$

4. Izraze preoblikuj v logaritem enega samega izraza.

   $2\log 5 + 3\log 2 =$

   $\frac{1}{4}\log 48 - \frac{1}{4}\log 3 =$

   $\frac{1}{3}\log 16 - \frac{1}{3}\log 2 =$

   $\frac{1}{2}\log 9 - \frac{2}{3}\log 27 =$

LOGARITEMSKA FUNKCIJA

(A) Definicija

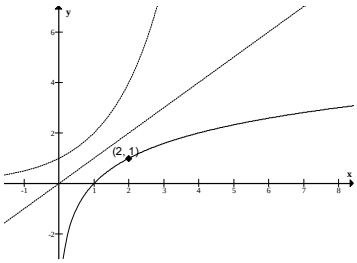
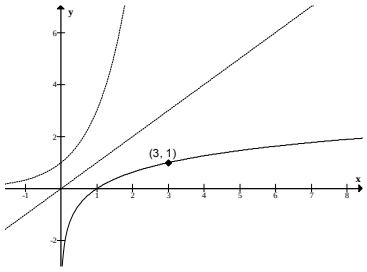
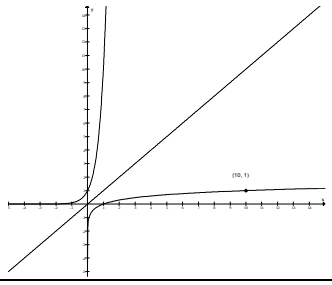
Logaritemska funkcija $f(x) = \log_a x \ (a > 0)$ je inverzna funkcija eksponentni funkciji.

1. Zapiši inverzne funkcije funkcij $f(x) = 2^x$ in $g(x) = 3^{\frac{x}{2}-1}$

Množico logaritemskih funkcij razdelimo glede na velikost osnove *a* na dve družini:

- $f(x) = \log_a x.\ a > 1$
- $f(x) = \log_a x.\ 0 < a < 1$

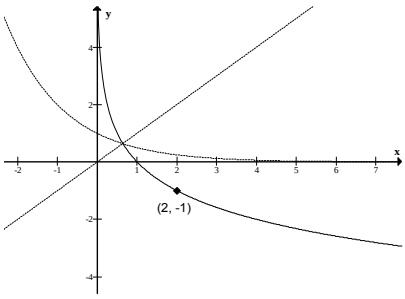
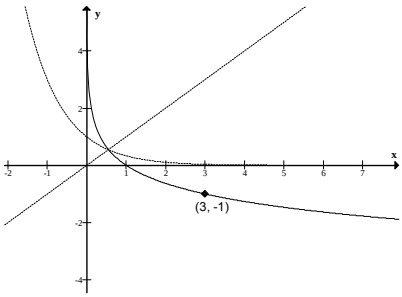
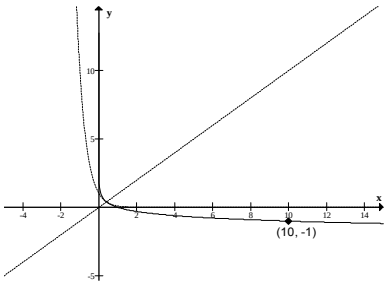
(B) Družina funkcij $f(x)=\log_a x.\ a>1$

$f(x)=\log_2 x$	$g(x)=\log_3 x$	$h(x)=\log x$
		

Lastnosti logaritemskih funkcij $f(x)=\log_a x.\ a>1$:

- $D_f = IR^+$
- $Z_f = IR$
- imajo ničlo pri $x = 1$
- so naraščajoče
- ordinatna os je asimptota
- so neomejene

(C) Družina funkcij $f(x)=\log_a x.\ 0<a<1$

$f(x)=\log_{\frac{1}{2}} x$	$g(x)=\log_{\frac{1}{3}} x$	$h(x)=\log_{\frac{1}{10}} x$
		

Lastnosti logaritemskih funkcij $f(x)=\log_a x.\ 0<a<1$:

- $D_f = IR^+$
- $Z_f = IR$
- imajo ničlo pri $x = 1$
- so padajoče
- ordinatna os je asimptota
- so neomejene

(D) Vaje

1. Dana je funkcija $f(x)=\log_3(x+1)$.
   a. Nariši graf funkcije.
   b. Izračunaj ničlo.
   c. Določi definicijsko območje in zalogo vrednosti.

2. Dana je funkcija $f(x)=\log_2(x-3)$.
   a. Nariši graf funkcije.
   b. Določi vrednosti neodvisne spremenljivke, kjer je $f(x)<0$.
   c. Določi definicijsko območje in zalogo vrednosti.

3. Dana je funkcija $f(x)=\log_{\frac{1}{2}}(x+1)+2$.
   a. Nariši graf funkcije.
   b. Določi definicijsko območje in zalogo vrednosti.
   c. Določi vrednosti neodvisne spremenljivke, kjer je $f(x)<0$.

4. Dana je funkcija $f(x)=\left|\log_{\frac{1}{4}}(x+2)+1\right|$.
   a. Nariši graf funkcije.
   b. Določi intervale naraščanja in padanja.
   c. Določi definicijsko območje in zalogo vrednosti.

LOGARITEMSKA ENAČBA

Pri reševanju logaritemskih enačb uporabljamo pravila za računanje z logaritmi. Dobljene enačbe niso nujno enakovredne prvotnim enačbam, zato moramo na koncu vedno napraviti še preizkus.

Reši enačbe in napravi preizkus:

$$\log_2(5x-2)=-1$$
$$\log(x-1)-\log x=\log(x+3)-\log(x-4)$$
$$\log_2(x+1)+\log_2 x=1$$
$$\log^2 x-2\log x-3=0$$
$$\frac{\log(x+1)}{\log(5x+2)}=1$$
$$\frac{\log x-1}{\log x-3}=\frac{\log x+2}{\log x+3}$$
$$\log^2 x+\log x^5+6=0$$

PREHOD K NOVI OSNOVI

Logaritem pri osnovi *a* lahko izračunamo z logaritmom pri osnovi *b* z obrazcem: $\log_a x=\frac{\log_b x}{\log_b a}$.

1. Izračunaj brez uporabe računala.

$$\log 4\cdot\log_4 10=$$
$$\log_4 1000\cdot\log 2=$$
$$\log_{\frac{1}{4}} 3\cdot\log_3\frac{1}{2}=$$
$$\log_6 18+\log_{36} 4=$$
$$\log_3 24-3\log_3 5\cdot\log_5 2=$$
$$\log_{64} 2\cdot\log_2 32-2\log_{64}\cdot\log_3 20=$$

2. Reši enačbe.

$$5^x=3$$
$$7^{x-4}=255$$
$$5^{x+3}=2^x$$
$$\log_2 x-\log_4 x-\log_8 x=1$$
$$\log_2 x+2\log_{16} x=1$$
$$\log_2 x-4\log_4 x=2$$